



www.amuzeshTV.ir

به نام خدا

شبکه آموزشی شبکه فرصت‌های برابر آموزشی



www.irib.ir/tv

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۲۳ / ۲ / ۱۳۸۶		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۶	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب A است.	۱
۱/۵	برای هر عدد طبیعی $n$ با استفاده از اصل استقراء ثابت کنید: $5^{n+1} - 4n - 1$ بر عدد ۱۶ بخش پذیر است.	۲
۱	می دانیم $\sqrt{5}$ گنگ است با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عدد $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ نیز گنگ است.	۳
۱	به روش بازگشتی ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۴
۱	درون یک مربع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه انتخاب می کنیم ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از ده نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.	۵
۱/۵	اگر $A = \{x^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 10\}$ الف) عضوهای مجموعه $A^2 - B^2$ را مشخص کنید. ب) $A^2 - B^2$ چند زیر مجموعه دارد؟	۶
۱	به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید: $A - (B \cap C \cap D) = (A - B) \cup (A - C) \cup (A - D)$	۷
۱	تمام افرازهای مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.	۸
۲	رابطه $R$ در $Z^2 - \{(0,0)\}$ به صورت مقابل تعریف شده است. الف) نشان دهید $R$ یک رابطه‌ی هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(3, -1)]$ را تعیین کنید.	۹
۲	یک سکه را ۳ بار می اندازیم مطلوبست تعیین: الف) فضای نمونه ای ب) پیشامد A که در آن لااقل ۲ بار رو بیاید. ج) پیشامد B که در آن هر سه بار سکه به یک طرف ظاهر شود. د) پیشامد $A \Delta B$	۱۰
«ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم»		

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۲۲ / ۳ / ۱۳۸۶		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۶	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱۱	از بین ۴ کارمند ۲ تکنسین و ۳ کارگر، کمیته ای ۵ نفره تشکیل می دهیم. مطلوب است احتمال آنکه: الف) در کمیته کارگری وجود نداشته باشد. ب) در کمیته حد اکثر یک کارمند وجود داشته باشد.	۱/۷۵
۱۲	از مجموعه اعداد {۱۰۰۰.....۳ و ۲} عددی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۲ یا بر ۷ یا بر هر دو بخش پذیر باشد چقدر است؟	۱/۵
۱۳	اگر $S = \{a, b, c, d\}$ و $p\{a, b, c\} = \frac{1}{4}$ و $p\{a, b, d\} = \frac{2}{3}$ نگاه $p\{a, b\}$ را بدست آورید.	۱/۲۵
۱۴	فرض کنیم دو قطعه چوب داریم که طولهای آنها به ترتیب ۱ و ۵/۰ متر باشد. قطعه بزرگتر را با اره دو قسمت می کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می شود، احتمال اینکه سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث بدهند چقدر است؟	۱/۵
۱۵	اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند ثابت کنید: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$	۱
	موفق باشید	۲۰ جمع نمره

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۲۳ / ۳ / ۱۳۸۶
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۶	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی

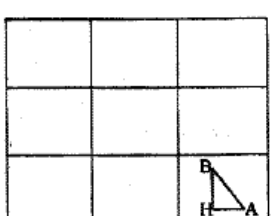
ردیف	راه‌نمای تصحیح
------	----------------

۱	$x = 2k$ $y = 2k + 2 \quad (./25)$ $z = 2k + 3$ $x \cdot y \cdot z = 2k(2k+2)(2k+3) \quad (./25)$ $= 2^3 k(k+1)(k+2) \quad (./25)$ $= 8k' \quad (./25)$
---	--

۲	$P(1): 5^1 - 2 - 1 = 0 \quad (./25)$ $P(k): 5^k - 2k - 1 = 16m \quad (./25)$ $P(k+1): 5^{k+1} - 2k - 5 = 16m' \quad (./25)$ ضرب طرفین فرض در ۵ $5^{k+1} - 2 \cdot k - 5 = 16m \times 5 \Rightarrow 5^{k+1} - 2k - 16k - 5 = 16m \times 5 \quad (./5)$ $5^{k+1} - 2k - 5 = 16m \times 5 + 16k = 16(5m + k) \quad (./25)$ $\Rightarrow 5^{k+1} - 2k - 5 = 16m'$
---	---

۳	برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ گنگ نباشد پس گویاست. (./25) $\sqrt{2+\sqrt{5}} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2+\sqrt{5} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a^2}{b^2} - 2 \quad (./5)$ گویا = گنگ به تناقض رسیدیم پس $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ گنگ است. (./25)
---	--

۴	$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow (./25)$ $(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (./25)$ $(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ بدیهی است. (./5)
---	---

۵	بنا بر اصل لانه گبوتری ده نقطه را به منزله ده کبوتر و ۹ قسمت را به عنوان لانه در نظر می‌گیریم چون $10 > 9$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر درون یک لانه است. (./25)
	
	$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2$ $(AB)^2 < \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \quad (./25)$ $(AB)^2 < \frac{2}{9}$ $AB < \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (./25)$

«ادامه در صفحه‌ی دوم»

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۸۶ / ۳ / ۲۳
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۶	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی

ردیف	راهنمای تصحیح
------	---------------

۶	$A = \{۲, ۴\}$ $B = \{۱, ۲, ۳\}$ (۰/۲۵) الف) $A^c = \{(۲, ۲), (۲, ۳), (۳, ۲), (۳, ۳)\}$ (۰/۲۵) $B^c = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۲, ۱), (۲, ۲), (۲, ۳), (۳, ۱), (۳, ۲), (۳, ۳)\}$ (۰/۵) $A^c - B^c = \{(۲, ۲), (۳, ۲), (۳, ۳)\}$ (۰/۲۵) ب) $۲^c = ۸$ (۰/۲۵)
۷	طرف اول $= A \cap (B \cap C \cap D)^c = [A \cap (B^c \cup C^c \cup D^c)] =$ (۰/۵) $(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \cup (A \cap D^c) = (A - B) \cup (A - C) \cup (A - D)$ (۰/۵)
۸	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$ (۰/۲۵) $\{a, b, c\}$ (۰/۲۵) $\{a\}, \{b, c\}$ $\{b\}, \{a, c\}$ $\{c\}, \{a, b\}$ (۰/۵)
۹	۱) $(a, b) R (a, b) \Leftrightarrow \frac{a}{b^r} = \frac{a}{b^r}$ (۰/۲۵) ۲) $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b^r} = \frac{c}{d^r} \Rightarrow \frac{c}{d^r} = \frac{a}{b^r} \Rightarrow (c, d) R (a, b)$ (۰/۵) $(a, b) R (c, d) \Rightarrow \frac{a}{b^r} = \frac{c}{d^r}$ } $\Rightarrow \frac{a}{b^r} = \frac{e}{f^r} \Rightarrow (a, b) R (e, f)$ (۰/۵) ۳) $(c, d) R (e, f) \Rightarrow \frac{c}{d^r} = \frac{e}{f^r}$ } چون R هر سه خاصیت بازتابی، تقارنی و ترازایی را دارد پس R هم ارزی است.    (۰/۲۵) $[(۲, -۱)] = \{(x, y) \mid (x, y) R (۲, -۱)\}$ (۰/۲۵) $\frac{x}{y^r} = \frac{۲}{(-۱)^r} \Rightarrow x = -۲y^r$ (۰/۲۵)
	«ادامه در صفحه سوم»

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۲۳ / ۳ / ۱۳۸۶
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۶	آگاره گل سنجش و ارزشیابی تحصیلی

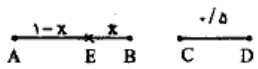
ردیف	راهنمای تصحیح
------	---------------

۱۰	<p>الف) <math>S = \{(ر,ر,ر), (پ,ر,ر), (ر,ر,پ), (پ,ر,پ), (ر,پ,ر), (پ,پ,ر), (ر,ر,ر), (پ,ر,ر), (ر,ر,پ), (پ,ر,پ), (ر,پ,ر), (پ,پ,ر)\}</math> (۰/۵)</p> <p>ب) <math>A = \{(ر,ر,ر), (ر,ر,پ), (ر,پ,ر), (پ,ر,ر)\}</math> (۰/۵)</p> <p>ج) <math>B = \{(ر,ر,ر), (پ,پ,پ)\}</math> (۰/۵)</p> <p>د) <math>A \Delta B = \{(پ,پ,پ), (پ,ر,ر), (ر,ر,پ), (ر,ر,ر)\}</math> (۰/۵)</p>
----	--

۱۱	<p>الف) <math>p(A) = \frac{\binom{۶}{۵}}{\binom{۹}{۵}} = \frac{۶}{۱۲۶} = \frac{۱}{۲۱}</math> (۰/۷۵)</p> <p>ب) <math>p(B) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۴} + \binom{۳}{۰}\binom{۵}{۵}}{\binom{۹}{۵}} = \frac{۴ \times ۵ + ۱ \times ۱}{۱۲۶} = \frac{۲۱}{۱۲۶} = \frac{۱}{۶}</math> (۱)</p>
----	---

۱۲	<p>A: <math>P(A) = \frac{\lfloor \frac{۱۰۰۰}{۲} \rfloor}{۱۰۰۰} = \frac{۵۰۰}{۱۰۰۰}</math> (۰/۲۵)</p> <p>B: <math>P(B) = \frac{\lfloor \frac{۱۰۰۰}{۷} \rfloor}{۱۰۰۰} = \frac{۱۴۲}{۱۰۰۰}</math> (۰/۲۵)</p> <p>چون <math>(۲,۷) = ۱ \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{\lfloor \frac{۱۰۰۰}{۱۴} \rfloor}{۱۰۰۰} = \frac{۷۱}{۱۰۰۰}</math> (۰/۵)</p> <p><math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۵۰۰}{۱۰۰۰} + \frac{۱۴۲}{۱۰۰۰} - \frac{۷۱}{۱۰۰۰} = \frac{۵۷۱}{۱۰۰۰}</math> (۰/۵)</p> <p>ادامه در صفحه‌ی چهارم</p>
----	--

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۲۳ / ۳ / ۱۳۸۶
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۶		اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی
ردیف		راهنمای تصحیح
۱۳	$p\{a, b, c\} + p\{d\} = 1 \quad (۰/۲۵)$ $p\{d\} = 1 - p\{a, b, c\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (۰/۵)$ $p\{a, b\} = \frac{2}{3} - p\{d\} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad (۰/۵)$	
۱۴	<p>فرض می کنیم قطعه چوب ۱ متری در نقطه E بریده شود که به فاصله X از یک سر چوب قرار دارد. بنابراین فضای نمونه ای را می توان خط AB به طول ۱ متر در نظر گرفت (۰/۲۵)</p>  <p>برای اینکه سه پاره خط AE، EB، CD، تشکیل یک مثلث بدهند باید طول هر پاره خط از مجموع طولهای دو پاره خط دیگر کمتر شود.</p> $AE + EB > CD \Rightarrow 1 - x + x > \frac{1}{3} \Rightarrow 1 > \frac{1}{3}$ $AE + CD > EB \Rightarrow 1 - x + \frac{1}{3} > x \Rightarrow \frac{4}{3} > 2x \Rightarrow \frac{2}{3} > x \quad (۰/۷۵)$ $EB + CD > AE \Rightarrow x + \frac{1}{3} > 1 - x \Rightarrow 2x > \frac{2}{3} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ $A = \left\{ x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \right\} \xrightarrow{(۰/۲۵)} P(A) = \frac{L(A)}{L(S)} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵)$	
۱۵	$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow 1 - P(A \cup B) \geq 0 \quad (۰/۲۵)$ $1 - \left( P(A) + P(B) - P(A \cap B) \right) \geq 0 \quad (۰/۵)$ $\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 \quad (۰/۲۵)$	

مصححین محترم:

لطفاً راه حل های صحیح دیگر را نیز بایم بندی نمایید